C. Ecuaciones e inecuaciones

C.1 Conceptos básicos

La resolución de ecuaciones es el ejemplo más práctico de cómo el álgebra nos ayuda a resolver problemas. Mediante las ecuaciones será posible encontrar valores que desconocemos en diferentes situaciones.

Antes de establecer métodos para resolver ecuaciones, es importante tener claro los siguientes conceptos: ecuación, identidad, ecuaciones equivalentes y conjunto solución.

Una **ecuación** es una igualdad entre expresiones algebraicas.

Por ejemplo: $5=3$, $4\left(x^2+1\right)=4x^2+4$ y $2x+1=5$.

Las igualdades pueden ser verdaderas, falsas o pueden depender del valor numérico que tengan las variables que están involucradas.

De los ejemplos que vimos, podemos ver que la primera es siempre falsa, la segunda es siempre verdadera y la tercera no se puede saber, ya que su veracidad depende del valor de x.

Si $x=2$ la igualdad $2x+1=5$ es verdadera, mientras que si $x=1$ esa igualdad es falsa.

Una **identidad** es una igualdad que es verdadera siempre.

Por ejemplo, $3+2=5$, $(x+1)^2=x^2+2x+1$ o bien $x^2-3=-2$ cuando $x=1$.

Una **solución** de una ecuación, es un valor que al sustituir en la igualdad la convierte en una identidad.

- Para determinar si cierto valor es una solución de una ecuación es una solución se debe encontrar el valor numérico de la expresión y determinar si la expresión resultante es una identidad.

EJEMPLO 61. Determine si los valores dados son soluciones de la respectiva ecuación:

a) $\mathbf{x=-3}$ **para** $\mathbf{5x+3=2x-6}$

Sustituyendo el valor dado: $5(-3)+3=2(-3)-6 \Rightarrow -15+3=-6-6 \Rightarrow -12=-12$, que es una identidad y por lo tanto, -3 sí es una solución de la ecuación.

b) $\mathbf{x=\sqrt{3}}$ **para** $\mathbf{\sqrt{6}x=3\sqrt{2}}$

Sustituyendo el valor dado: $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{18}=3\sqrt{2}$ y simplificando el radical: $3\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, que es una igualdad verdadera, entonces $\sqrt{3}$ es una solución de la ecuación.

c) $\mathbf{x=5}$ **para** $\mathbf{\frac{x}{5}=x-3}$

Al sustituir, obtenemos: $\frac{5}{5}=5-3 \Rightarrow 1=2$ que al ser una igualdad falsa se deduce que ese valor no es una solución de la ecuación.

d) $\mathbf{x=1}$ **para** $\mathbf{\dfrac{2x-2}{x-1}=-1}$

Obtenemos: $\dfrac{2\cdot 1-2}{1-1}=-1\Rightarrow \dfrac{0}{0}=-1$, lo cual es falso y por lo tanto 1 no es una solución de la ecuación.

e) $\mathbf{x=-2}$ **para** $\mathbf{(x-2)^2=x^2-4x+4}$

Obtenemos: $(-2-2)^2=(-2)^2-4(-2)+4\Rightarrow(-4)^2=4+8+4\Rightarrow 16=16$ y por lo tanto, -2 es una solución de la ecuación.

- En esta última ecuación, cualquier otro número real también es solución y es porque la ecuación es una identidad: La II fórmula notable.

El **conjunto solución** de una ecuación, es el conjunto de todos los valores que son solución de esa ecuación.

Entonces, cuando tenemos una ecuación, por lo general lo que buscamos es el conjunto solución, esto se resume de la siguiente manera:

Resolver una ecuación significa encontrar su conjunto solución.

Dos ecuaciones **son equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Por ejemplo, las ecuaciones $2x+3=5$ y $2x=2$ son equivalentes. La única solución de ambas es $x=1$. Mientras, las ecuaciones $3x+3=5$ y $3x=5$ no son equivalentes.

Por último, la idea general para resolver una ecuación es ir poco a poco reduciéndola a otras ecuaciones equivalentes más sencillas de resolver. Estos procedimientos los aprenderemos a partir de la siguiente sección.

Ejercicio C.1 Determine si los valores dados son soluciones de la respectiva ecuación.

1. $x=2$ para $5x+3=2x+9$

2. $x=\dfrac{2}{3}$ para $6x-3=3x-1$

3. $x=\sqrt{6}$ para $\sqrt{3}x=\sqrt{12}$

4. $x=-3$ para $\dfrac{x+3}{3}=0$

5. $x=\sqrt{3}$ para $\left(x^2-x\right)^2=x^4-x^2$

6. $x=-2$ para $x^2=4$

7. $x=-3$ para $\sqrt{9}=x$

8. $x=-4$ para $\sqrt{x^2}=x$

9. $x=-5$ para $\sqrt[3]{x^3}=x$

10. $x=8$ para $6=6$

11. $x=\pi$ para $\dfrac{x}{x}=1$

12. $x=0$ para $\dfrac{x}{x}=1$

13. $x=\dfrac{-41}{7}$ para $\dfrac{3}{5}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$

14. $x=-2$ para $-x^3-2x^2+6x-12=0$

15. $x=-3$ para $\dfrac{x^2-9}{x+3}=x-3$

16. $x=4$ para $x^4+26x=26x+x^4$

17. $x=2$ para $x^2+1=x^2$

18. $x=3$ para $\dfrac{x^2-9}{x+3}=x-3$

19. $x=0$ para $4=0$

20. $x=a$ para $x^2-2x+a^2=-2a$, $a\in\mathbb{R}$

21. $x=\dfrac{-1}{2}$ para $\dfrac{2x+1}{2x+1}=1$

22. $x=0$ para $x^0=1$

C.2 Ecuaciones equivalentes y ecuaciones de un paso

- Al sumar o restar a una ecuación por un número real se obtiene una ecuación equivalente.
- Al multiplicar o dividir una ecuación por un número real distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente.

Por ejemplo: $5x-3=5$ es equivalente a $5x-3+3=5+3$ y $4x=8$ es equivalente a $\frac{4x}{4}=\frac{8}{4}$.

- ➢ Observemos que esto es resultado de las propiedades de los números reales. Si $A=B$ entonces con certeza se puede asegurar que $A+c=B+c$. De ahí que esas ecuaciones tendrán las mismas soluciones.
- ➢ Lo mismo sucede con las demás operaciones, siempre tomando en cuenta, que la multiplicación o división por 0 no es permitida para encontrar ecuaciones equivalentes.

Para resolver ecuaciones de un paso, la idea es utilizar esta propiedad de manera adecuada para despejar la incógnita. Por ejemplo, si tenemos $5x$ podríamos dividir entre 5 para obtener x.

Esto es lo que llamamos operaciones inversas y las usamos para **despejar** la incógnita:

Operación:	**Operación inversa:**	**Ecuación:**	**Es equivalente a:**	**Obtenemos:**
Suma	Resta	$x+3=4$	$x+3-3=4-3$	$x=1$
Resta	Suma	$x-5=10$	$x-5+5=10+5$	$x=15$
Multiplicación	División	$12x=24$	$\frac{12x}{12}=\frac{24}{12}$	$x=2$
División	Multiplicación	$\frac{x}{3}=2$	$\frac{3\cdot x}{3}=2\cdot 3$	$x=6$

- ➢ Este proceso se puede sintetizar de la siguiente manera: Para despejar una variable el número que la afecta se debe "pasar" al otro lado del igual a realizar la operación inversa.

EJEMPLO 62. Resuelva las siguientes ecuaciones de un paso:

a) $\mathbf{x+4=9}$: Pasamos el 4 a restar al otro lado de la ecuación: $x=9-4 \Rightarrow x=5$ y el conjunto solución es $S=\{5\}$

b) $\mathbf{\sqrt{3}x=9}$: Pasamos $\sqrt{3}$ a dividir al otro lado de la ecuación: $x=\frac{9}{\sqrt{3}}$ y racionalizando

$$\Rightarrow x=\frac{9}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\sqrt{3}}{\cancel{3}} \Rightarrow x=3\sqrt{3}$$. El conjunto solución es $S=\{3\sqrt{3}\}$

- ➢ Recuerde que resolver una ecuación significa encontrar el conjunto solución, así que esta debe ser la respuesta que damos.

Ejercicio C.2 Resuelva las siguientes ecuaciones.

1. $x+1=5$

2. $2x=-8$

3. $-3x=18$

4. $x-24=-35$

5. $12+x=-12$

6. $\frac{x}{2}=\frac{7}{2}$

7. $\frac{x}{3}=\frac{5}{9}$

8. $\frac{5}{9}x=\frac{25}{18}$

9. $\frac{2x}{3}=\frac{4}{45}$

10. $x+5\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

11. $x-0,\overline{3}=0,\overline{6}$

12. $\dfrac{x}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

13. $2\sqrt{3}x=-4$

14. $x+2\sqrt{7}=5\sqrt{28}$

15. $2^{70}x=2^{100}$

16. $\left(\sqrt{3}-1\right)x=\sqrt{3}-1$

17. $\dfrac{x}{\sqrt{8}-2}=\sqrt{2}+1$

18. $\left(\sqrt{5}-1\right)x=1$

19. $\sqrt{5}x-x=4$

C.3 Ecuaciones lineales

Una **ecuación lineal** en una variable es una ecuación que es equivalente a una de la forma: $mx+b=0$, donde m y b representan números reales.

- Es decir que la incógnita no tiene potencias diferentes de 1, ni está en el denominador de la ecuación.
- A las ecuaciones lineales también se les llama **ecuaciones de primer grado.**

Para reducir una ecuación, pasaremos todas las variables de un lado del igual y los números del otro, siempre siguiendo los principios estudiados en la sección anterior.

EJEMPLO 63. Resuelva $12x+9=5x-5$

PASO 1) Pasamos $5x$ al lado izquierdo y 9 al lado derecho: $12x-5x=-5-9$

PASO 2) Realizamos las operaciones respectivas: $7x=-14$

PASO 3) Pasamos el 7 a dividir: $x=\dfrac{-14}{7}\Rightarrow x=-2$

PASO 4) Escribimos el conjunto solución: $S=\{-2\}$

EJEMPLO 64. Resuelva $3x-\left(2x-3\right)=-1$

PASO 1) Eliminamos el paréntesis del lado izquierdo: $3x-2x+3=-1$

PASO 2) Sumando monomios: $x+3=-1$

PASO 3) Pasamos el 3: $x=-1-3\Rightarrow x=-4$

PASO 4) Escribimos el conjunto solución: $S=\{-4\}$.

EJEMPLO 65. Resuelva $5x+3=10$

PASO 1) Primero pasamos el 3 a restar: $5x=10-3\Rightarrow 5x=7$

PASO 2) Pasamos el 5 a dividir: $x=\dfrac{7}{5}$

PASO 3) Escribimos el conjunto solución: $S=\left\{\dfrac{7}{5}\right\}$

- Observe que no se puede pasar a dividir el 5 antes de pasar a restar el 3.
- Para despejar siempre primero se simplifican los miembros de la ecuación, y para "pasar" de lado se debe seguir el **orden inverso** del orden en que se realizan las operaciones. Por ejemplo en $2x+1=3$ debemos primero pasar lo que está sumando (el 1) y por último lo que está multiplicando (el 2).

EJEMPLO 66. Resuelva $5(x-3)=-2(8-2x)$

PASO 1) Realizamos las multiplicaciones respectivas: $5x-15=-16+4x$

PASO 2) Pasamos las " x " de un lado y los números del otro: $5x-4x=-16+15$

PASO 3) Reducimos: $x=-1$

PASO 4) Escribimos el conjunto solución: $S=\{-1\}$

EJEMPLO 67. Resuelva $3x-2(2x+1)=10x-2(-3+x)$

PASO 1) Realizamos las multiplicaciones respectivas: $3x-4x-2=10x+6-2x$

PASO 2) Reducimos: $-x-2=8x+6$

PASO 3) Pasamos las " x " de un lado y los números del otro: $-x-8x=6+2$

PASO 4) Reducimos y pasamos el -9 de lado: $-9x=8\Rightarrow x=\frac{8}{-9}$

PASO 5) Escribimos el conjunto solución: $S=\left\{\frac{-8}{9}\right\}$

- El valor $\frac{8}{-9}$ es igual a $-\frac{8}{9}$ y a $\frac{-8}{9}$, pero esta última es la forma estándar de escribirlo.

EJEMPLO 68. Resuelva $8+3[x-3(x+2)]=2$

PASO 1) Realizamos las multiplicación dentro del paréntesis $8+3[x-3x-6]=2$

PASO 2) Reducimos: $8+3[-2x-6]=2$

PASO 3) Realizamos la multiplicación: $8-6x-18=2$

PASO 4) Reducimos: $-6x-10=2$

PASO 5) Pasamos el 10 de lado: $-6x=2+10\Rightarrow -6x=12$

PASO 6) Pasamos el -6 de lado y escribimos el conjunto solución: $x=\frac{12}{-6}\Rightarrow x=-2\Rightarrow S=\{-2\}$

- Cuando en una ecuación aparece uno o varios denominadores es conveniente escribir ambos lados de la ecuación con un denominador común. Este luego se puede cancelar porque si dos fracciones son iguales y sus denominadores son iguales, entonces los numeradores también deben ser iguales.

EJEMPLO 69. Resuelva $\frac{x}{3}+2=\frac{3}{5}$

PASO 1) Escribimos la ecuación con un denominador común: $\frac{5\cdot x+15\cdot 2}{15}=\frac{3\cdot 3}{15}$

PASO 2) El denominador se cancela y obtenemos la ecuación: $\frac{5x+30}{\cancel{15}}=\frac{9}{\cancel{15}}\Rightarrow 5x+30=9$

PASO 3) Pasando el 30: $5x=9-30\Rightarrow 5x=-21$

PASO 4) Pasando el 5 y escribimos el conjunto solución: $x=\frac{-21}{5}\Rightarrow S=\left\{\frac{-21}{5}\right\}$

EJEMPLO 70. Resuelva $5(x-3)=\frac{x}{2}-1$

PASO 1) Escribimos la ecuación con un denominador común: $\frac{2\cdot 5(x-3)}{2}=\frac{x-2\cdot 1}{2}$

PASO 2) El denominador se cancela y obtenemos : $\frac{10(x-3)}{\cancel{2}}=\frac{x-2}{\cancel{2}}\Rightarrow 10x-30=x-2$

PASO 3) Pasamos las "x" de un lado y los números del otro: $10x-x=-2+30\Rightarrow 9x=28$

PASO 4) Pasamos el 9 y escribimos el conjunto solución: $x=\frac{28}{9}\Rightarrow S=\left\{\frac{28}{9}\right\}$

EJEMPLO 71. Resuelva $2-\frac{x-3}{2}=2x+1$

PASO 1) Escribimos la ecuación con un denominador común: $\frac{2\cdot 2-1\cdot(x-3)}{2}=\frac{2\cdot(2x+1)}{2}$

PASO 2) El denominador se cancela y obtenemos : $\frac{4-x+3}{\cancel{2}}=\frac{4x+2}{\cancel{2}}\Rightarrow -x+7=4x+2$

PASO 3) Pasamos las "x" de un lado y los números del otro: $7-2=4x+x\Rightarrow 5=5x$

PASO 4) Pasando el -5: $\frac{5}{5}=x\Rightarrow 1=x$

PASO 5) Escribimos el conjunto solución: $S=\{1\}$

- Observemos la importancia del paréntesis que colocamos a la hora de encontrar el denominador común en el segundo factor. Si no lo escribimos sería posible confundir el signo que afecta al 3.
- En este ejemplo, decidimos pasar las x al lado derecho, y dejar los números del lado izquierdo, porque esto facilita los cálculos. Recordemos que es lo mismo decir $x=1$ que $1=x$, y por lo general, preferimos dejar las variables donde hay "más".

Ejercicio C.3 Resuelva las siguientes ecuaciones lineales

1. $4x+3=16$
2. $3x-2=9$
3. $12x=4x+8$
4. $5x+3=2x-9$
5. $11x-20=15x+16$
6. $10x-5(x-3)=5$
7. $-2x+4(-x-3)=18$
8. $4(3x-2)=6(x-3)$
9. $-2(-x+12)=-(x+6)$
10. $2x+4(x-3)=0$
11. $4x-2(-x-13)=10-(2x-11)$
12. $3x+2(-x+3)=2-(-3x+1)$
13. $-(2x-5(x-3))=42$
14. $15x-(2x-7(x+3))=31$
15. $10-2[x-3(x+2)]=2$
16. $\frac{x+13}{4}=-6(x+2)$
17. $\frac{x}{2}-1=\frac{3}{2}$
18. $\frac{2x-4}{2}=3$
19. $\frac{3x+9}{6}=1$
20. $3x-\frac{1}{2}=2(x+1)$

21. $7(x+2)=\frac{x}{3}-2$

22. $\frac{3x-5}{10}-\frac{x}{15}=\frac{x-1}{3}$

23. $\frac{2x-1}{2}-\frac{5}{3}=\frac{x-3}{6}$

24. $\frac{x-6}{2}-\frac{2x-9}{3}=-2$

25. $\frac{4x-3}{10}-\frac{5x-2}{15}=\frac{2x+6}{6}$

Las siguientes ecuaciones se pueden resolver por los métodos estudiados pero tienen un grado de dificultad mayor:

26. $x\left(2x-3\left(x+2\left(x-2\right)\right)\right)=7\left(2-x^2\right)$

27. $(x+3)(4x-2)=(2x-1)^2$

28. $\sqrt{3}x-2x=5$

29. $\sqrt{3}(2x-3)=\sqrt{2}$

30. $\frac{3x-5}{\sqrt{6}}=\sqrt{2}\,x+1$

C.4 Otros casos de ecuaciones

En una ecuación es posible que no haya soluciones o bien que tenga infinitas soluciones.

EJEMPLO 72. Resuelva $\boldsymbol{\frac{x}{2}-\frac{x-1}{6}=\frac{x}{3}}$

PASO 1) Escribimos la ecuación con un denominador común: $\frac{3\cdot x-1\cdot(x-1)}{6}=\frac{2\cdot x}{6}$

PASO 2) El denominador se cancela y obtenemos : $\frac{3x-x+1}{\cancel{6}}=\frac{2x}{\cancel{6}}\Rightarrow 2x+1=2x$

PASO 3) Pasamos las "x" de un lado y los números del otro: $2x-2x=-1\Rightarrow 0=-1$

PASO 4) Obtenemos una igualdad falsa, es decir no puede tener soluciones. Como esta ecuación es equivalente a la original tenemos que el conjunto solución de la ecuación es vacío: $S=\phi$

- El **conjunto vacío** es el conjunto que no tiene elementos, y se denota ϕ o bien $\{\ \}$, pero **nunca** $\{\phi\}$.

EJEMPLO 73. Resuelva $\boldsymbol{x+3=\frac{5x+15}{5}}$

PASO 1) Escribimos la ecuación con un denominador común: $\frac{5(x+3)}{5}=\frac{5x+15}{5}$

PASO 2) Haciendo la multiplicación respectiva : $\frac{5x+15}{5}=\frac{5x+15}{5}$

PASO 3) Observemos que esta ecuación es una identidad (ambos miembros son idénticos) y esto quiere decir que cualquier valor de "x" para el cual esté definida esa expresión es una solución. En nuestro caso, los valores de "x" son números reales y por lo tanto: $S=\mathbb{R}$

- Al igual que en el ejemplo anterior, **no se debe escribir** $\{\mathbb{R}\}$.

Ecuaciones fraccionarias

Una **ecuación fraccionaria de primer grado** es una ecuación de la forma $\frac{ax+b}{cx+d}=e$, donde a,b,c,d y e son número reales.

Para que una ecuación de esta forma esté definida es indispensable que su denominador no sea 0 ya que no es posible dividir entre 0.

Los valores que anulan el denominador de una fracción algebraica se llaman **restricciones** y no pueden ser soluciones de una ecuación.

EJEMPLO 74. Encuentre las restricciones de las siguientes ecuaciones

$\frac{x+1}{x-2}=-1$	$\frac{2x-3}{5x}=1$	$\frac{2x}{x+\sqrt{3}}=0$	$\frac{x-7}{2x-10}=-7$
La ecuación está definida sólo si $x-2\neq 0$	La ecuación está definida sólo si $5x\neq 0$	La ecuación está definida sólo si $x+\sqrt{3}\neq 0$	La ecuación está definida sólo si $2x-10\neq 0$
Despejando $x\neq 2$	Despejando $x\neq \frac{0}{5}\Rightarrow x\neq 0$	Despejando $x\neq -\sqrt{3}$	Despejando $2x\neq 10\Rightarrow x\neq \frac{10}{2}\Rightarrow x\neq 5$
La restricción es $x\neq 2$	La restricción es $x\neq 0$	La restricción es $x\neq -\sqrt{3}$	La restricción es $x\neq 5$

Para resolver una ecuación de este tipo, primero se debe encontrar las restricción, y luego pasar a multiplicar el denominador. Después, se resuelva la ecuación resultante y se compara la solución con la restricción.

EJEMPLO 75. Resuelva $\frac{x-3}{x+2}=2$

PASO 1) Establecemos la restricción: $x+2\neq 0\Rightarrow x\neq -2$

PASO 2) Pasamos a multiplicar el denominador: $x-3=2\cdot(x+2)\Rightarrow x-3=2x+4$

PASO 3) Resolvemos la ecuación resultante: $x-2x=4+3\Rightarrow -x=7\Rightarrow x=-7$

PASO 4) La solución no es la restricción, entonces: $S=\{-7\}$

EJEMPLO 76. Resuelva $\frac{3x+9}{x+3}=-5$

PASO 1) Establecemos la restricción: $x+3\neq 0\Rightarrow x\neq -3$

PASO 2) Pasamos a multiplicar el denominador: $3x+9=-5\cdot(x+3)\Rightarrow 3x+9=-5x-15$

PASO 3) Resolvemos la ecuación resultante: $3x+5x=-15-9\Rightarrow 8x=-24\Rightarrow x=\frac{-24}{8}\Rightarrow x=-3$

PASO 4) Como la solución es la restricción: $S=\phi$

- Con el ejemplo anterior debe quedar clara la importancia de establecer y tomar en cuenta las restricciones cuando se trabaja con fracciones algebraicas.

EJEMPLO 77. Resuelva $\dfrac{x-7}{2x-14}=\dfrac{1}{2}$

PASO 1) Establecemos la restricción: $2x-14\neq 0 \Rightarrow 2x\neq 14 \Rightarrow x\neq \dfrac{14}{2} \Rightarrow x\neq 7$

PASO 2) Pasamos a multiplicar los denominadores: $2(x-7)=1(2x-14) \Rightarrow 2x-14=2x-14$

PASO 3) Como esta es una identidad, el conjunto solución es todos los números reales, exceptuando los valores para los cuales la ecuación no esté definida (la restricción) $S=\mathbb{R}-\{7\}$

- El conjunto $\mathbb{R}-\{7\}$ es el conjunto formado por todos los números reales, exceptuando el 7 .

EJEMPLO 78. Resuelva $\dfrac{2x-a}{x+b}=1,\ a,b\in\mathbb{R}$

- Esta es una ecuación en la que a y b representan constantes reales, entonces el conjunto solución depende de los valores que tengan.

PASO 1) Establecemos la restricción: $x+b\neq 0 \Rightarrow x\neq -b$

PASO 2) Pasamos a multiplicar los denominadores: $2x-a=1(x+b)$

PASO 3) Resolvemos la ecuación $\Rightarrow 2x-a=x+b \Rightarrow 2x-x=b+a \Rightarrow x=a+b$

PASO 4) Debemos comparar la solución obtenida con la restricción, y estas coinciden únicamente si $a+b=-b \Leftrightarrow a=-2b$. Entonces, en ese caso no hay soluciones y en los demás sí.

PASO 5) El conjunto solución es : $S=\{a+b\}$ si $a\neq -2b$ y $S=\phi$ si $a=-2b$

Ejercicio C.4 Resuelva las siguientes ecuaciones. Cuando aparecen a,b representan números reales.

1. $x^2+1=(x+1)^2$

2. $12x-3=3(4x-1)$

3. $(x-2)(x+1)=x^2-x$

4. $(2x-1)^2+4=4x^2-4x$

5. $\dfrac{x-5}{5}+\dfrac{2x-3}{3}=\dfrac{13}{3}\left(\dfrac{x}{5}-1\right)$

6. $\dfrac{x+1}{4}-\dfrac{2x-1}{8}=\dfrac{3}{8}$

7. $\dfrac{3x-2}{x+3}=1$

8. $\dfrac{1}{x}=0$

9. $\dfrac{3x+9}{-2x-6}=\dfrac{-3}{2}$

10. $\dfrac{15-10x}{2x-3}=-5$

11. $\dfrac{-1}{x+1}=-2$

12. $x-\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{1}{3}$

13. $x-\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{2}{5}$

14. $2+\dfrac{x-3}{x+1}=5$

15. $\dfrac{x-b}{a}=a$

16. $2x-a^2=a^2+2b^2$

17. $ax+2a=a^2$

18. $\dfrac{x-a}{x+a}=2$

19. $\dfrac{x-a}{x+2b}=-2$

20. $\dfrac{1}{2}(x-2a)=b$

C.5 Problemas

La resolución de problemas es la aplicación más importante de las ecuaciones. En esta sección, se plantean problemas que se pueden resolver mediante ecuaciones lineales.

Para plantear las ecuaciones que se necesitan para resolver problemas, debemos interpretar la información que nos dan en los enunciados. Gran parte de esa información son frases que debemos convertir a lenguaje algebraico. Ofrecemos un resumen de las más usadas.

Algunas frases comunes para el lenguaje algebraico

Frase	Se representa por	Donde x representa
Un número aumentado en 4	$x+4$	El número
Un número disminuido en 5	$x-5$	El número
El duplo o doble de un número	$2x$	El número
El triple de un número	$3x$	El número
El cuádruplo de un número	$4x$	El número
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$	El número
La quinta parte de un número	$\frac{x}{5}$	El número
Las dos terceras parte de un número	$\frac{2x}{3}$	El número
Dos números en razón $4:5$	x y $\frac{5x}{4}$	El menor de los números (el mayor es $\frac{5x}{4}$)
Dinero en monedas de ¢25	$25x$	El número de monedas de ¢25
Un número excede en 3 a otro	$x+3$ el número mayor	El menor de los números
Dos números consecutivos	x y $x+1$	El menor de los números
Dos números pares consecutivos	x y $x+2$	El menor de los números
Dos números impares consecutivos	x y $x+2$	El menor de los números

Pasos para la resolución de problemas

1) Se lee completamente el problema, buscando los datos importantes.
2) Se define la variable.
3) Se plantea la ecuación correspondiente.
4) Se resuelve la ecuación.
5) Se verifica que las soluciones sean consistentes con el problema y se responde la pregunta.

EJEMPLO 79. Encuentre un número que aumentado en 20 equivale al triple del número.

Si denotamos el número que buscamos por x entonces ese número aumentado en 20 se representa por $x+20$. Además, el triple del número se representa por $3x$.

El enunciado afirma que esas cantidades son equivalentes, es decir $x+20=3x$.

Resolviendo la ecuación, $20=3x-x \Rightarrow 20=2x \Rightarrow \frac{20}{2}=x \Rightarrow x=10$.

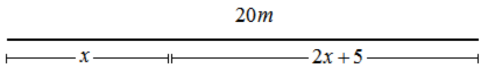
Así, el número que buscamos es 10.

EJEMPLO 80. Al sumar dos números pares consecutivos se obtiene 38. ¿Cuáles son los números?

Sea x el menor de los números, entonces el siguiente número par es $x+2$.

El enunciado, afirma que los números sumados dan como resultado 38, es decir $x+(x+2)=38$ y resolviendo esta ecuación: $2x+2=38 \Rightarrow 2x=36 \Rightarrow x=\frac{36}{2} \Rightarrow x=18$ y el otro número es $18+2=20$. Entonces, los números son 18 y 20.

EJEMPLO 81. Un trozo de alambre de $20m$ se divide en dos pedazos. Si el pedazo más grande excede en $5m$ al doble del pedazo más pequeño ¿Cuánto miden los pedazos?



Sea x la medida del pedazo más pequeño, entonces el pedazo más grande mide $2x+5$.

Como los pedazos juntos completan el alambre de $20m$, entonces $x+(2x+5)=20$.

Al resolver la ecuación, $3x+5=20 \Rightarrow 3x=20-5 \Rightarrow 3x=15 \Rightarrow x=\frac{15}{3} \Rightarrow x=5$.

El otro pedazo mide $2\cdot 5+5=10+5=15$. Entonces, los pedazos miden $5m$ y $15m$.

EJEMPLO 82. Dos números sumados dan 15 y uno de los números es dos terceras partes del otro. Encuentre los números.

Si x es uno de los números, el otro se puede representar por $\frac{2x}{3}$.

Luego, $x+\frac{2x}{3}=15 \Rightarrow \frac{3\cdot x+2x}{3}=\frac{3\cdot 15}{3} \Rightarrow \frac{5x}{\cancel{3}}=\frac{45}{\cancel{3}} \Rightarrow x=\frac{45}{5} \Rightarrow x=9$.

El otro número es $\frac{2\cdot 9}{3}=\frac{18}{3}=6$. Los números son 6 y 9.

EJEMPLO 83. Karol actualmente tiene 6 años y Diego 16. ¿Dentro de cuántos años la edad de Diego será el doble de la de Karol?

Si x es el número de años para que eso pase, en ese momento Karol tendrá $6+x$ y Diego $16+x$.

	Actualmente	Dentro de x años
Karol	6	$6+x$
Diego	16	$16+x$

Entonces, $16+x=2(6+x)$ y resolviendo esta ecuación: $16+x=12+2x \Rightarrow 16-12=2x-x \Rightarrow 4=x$.

Entonces, dentro de 4 años la edad de Diego, será el doble de la edad de Karol.

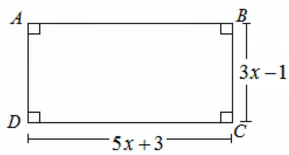
- Este tipo de tablas son muy útiles para representar edades en diferentes momentos, especialmente porque hay que tener claro que antes de plantear la ecuación se le debe sumar (o restar dependiendo del caso) la cantidad de años que pasan.

EJEMPLO 84. **En un viaje a la ida tardamos 4 horas y a la vuelta al aumentar la velocidad $20\,\frac{km}{h}$ duramos una hora menos. ¿A qué velocidad viajamos en la ida?**

Para este problema debemos recordar la relación $v=\dfrac{d}{t}$ o bien $d=v\cdot t$, donde v representa la velocidad, d la distancia y t el tiempo.

Sea v la velocidad a la que se viajó en la ida, entonces la velocidad a la que se viajó en la vuelta es $v+20$. La distancia recorrida la podemos calcular $d=v\cdot 4$ o bien $d=(v+20)\cdot 3$ ya que tardamos una hora menos. Como esta distancia es la misma, tenemos: $v\cdot 4=(v+20)\cdot 3$ y resolviendo esta ecuación: $4v=3v+60\Rightarrow 4v-3v=60\Rightarrow v=60$. La velocidad a la ida era de $60\,\frac{km}{h}$.

EJEMPLO 85. **En el siguiente rectángulo el perímetro es $68m$. Encuentre el área.**



El perímetro de la figura lo podemos representar algebraicamente con la expresión: $P=2(5x+3)+2(3x-1)$ y como $P=68$ tenemos:

$$68=2(5x+3)+2(3x-1)\Rightarrow 68=10x+6+6x-2\Rightarrow 68=16x+4$$

$$\Rightarrow 68-4=16x\Rightarrow 64=16x\Rightarrow x=\frac{64}{16}\Rightarrow x=4.$$

Luego el ancho mide $3x-1=3\cdot 4-1=12-1=11m$ mientras que el largo mide $5x+3=5\cdot 4+3=20+3=23m$ y por lo tanto el área es $23\cdot 11=253m^2$.

EJEMPLO 86. **Marco tiene 40 monedas, algunas de $¢100$ y otras de $¢500$. Si en total tiene $¢8800$ ¿Cuántas monedas tiene de cada tipo?**

Si Marco tiene x monedas de $¢100$, entonces el debe tener $40-x$ monedas de $¢500$.

El dinero que tiene se encuentra multiplicando el número de monedas por su valor, es decir: $100\cdot x$ para las de $¢100$ y $500(40-x)$ para las de $¢500$. Al sumar estas cantidades obtenemos el dinero total que tiene Marco, es decir $¢8800$. Entonces:

$$100x+500(40-x)=8800\Rightarrow 100x+20\,000-500x=8\,800$$

$$\Rightarrow -400x=8\,800-20\,000\Rightarrow -400x=-11200\Rightarrow x=\frac{-11200}{-400}\Rightarrow x=28.$$

Por lo tanto, Marco tiene 28 monedas de $¢100$ y $40-28=12$ monedas de $¢500$.

Ejercicio C.5 Resuelva los siguientes problemas.

1. Un número disminuido en su quinta parte es equivalente a la mitad del número aumentado en tres ¿Cuál es el número?
2. Un número disminuido en su cuarta parte es equivalente a la mitad del número aumentado en dos ¿Cuál es el número?
3. Encuentre dos números impares consecutivos cuya suma sea 24.
4. La cuarta parte de un número es equivalente a siete aumentado en el doble del número. ¿Cuál es el número?

5. La suma de dos números es 20. Si el doble del menor excede en 4 al mayor, encuentre los números.

6. La suma de dos números es 20, Si el mayor aumentado en 1 equivale al doble del menor, encuentre los números.

7. La diferencia de dos números es 18. Si el doble del mayor excede en 14 al triple del menor, ¿Cuáles son los números?

8. Juan tiene cierta cantidad de dinero en monedas de $¢500$. Si tuviera 20 monedas más entonces le faltarían $¢2000$ para tener el doble de lo que tiene. ¿Cuántas monedas tiene Juan?

9. Pedro tiene 25 monedas de dos denominaciones distintas, de manera que el valor de un tipo de monedas es el quíntuplo del valor del otro tipo. Si tiene cuatro veces más monedas del valor más alto y $¢525$, ¿Cuál es el valor de cada tipo de moneda?

10. En una alcancía el número de monedas de $¢25$ es el triple del número de monedas de $¢100$ y la mitad del número de monedas de $¢20$. Si en total hay $¢2360$, ¿Cuántas monedas de $¢25$ hay?

11. Dos números enteros están en razón $2:3$. Si la suma de los números es 20. ¿Cuánto es el producto de los números?

12. Los ángulos de un triángulo están en razón $1:3:4$. ¿Cuánto mide el ángulo mayor?

13. En un triángulo un lado mide la tercera parte del perímetro, el segundo lado aumentado en tres equivale a la mitad del perímetro y el tercer lado mide 8. ¿Cuánto es el perímetro?

14. María tiene el doble de la edad de Marta, pero dentro de 2 años tendrá ocho años más. ¿Cuál es la edad actual de María?

15. Un padre tiene el triple de la edad de su hijo y dentro de 16 años el padre tendrá el doble. ¿Cuál es la edad actual del padre?

16. Un padre tiene un año más que seis veces la edad de su hijo y dentro de seis años tendrá un año más que el triple de la edad de su hijo. ¿Cuál es la edad actual del padre?

17. Para convertir temperaturas de grados Fahrenheit grados Celsius a se utiliza la fórmula $C=\frac{5}{9}(F-32)$.

a. Si el agua hierve a $212°$ Fahrenheit, ¿a cuántos grados Celsius corresponde?

b. Si el agua se congela a $0°$ Celsius, ¿a cuántos grados Fahrenheit corresponde?

c. ¿A qué temperatura se obtiene el mismo resultado en grados Celsius que en grados Fahrenheit?

18. Encuentre el número que se debe sumar tanto al numerador como al denominador de la fracción $\frac{2}{5}$ para que la nueva fracción sea equivalente a $\frac{3}{4}$.

19. Para recorrer cierta distancia al trabajo un hombre camina durante 2 horas a cierta velocidad. De vuelta a su casa camina $1\frac{km}{h}$ más despacio y tarda media hora más que a la ida. Determine la distancia de la casa del hombre a su trabajo.

20. Un trozo de alambre se divide en 24 pedazos de igual medida. Si se hubiera dividido en seis pedazos menos, entonces cada pedazo mediría $0,4m$ más. Determine la medida del alambre.

21. Pedro tiene 6 años menos que Juan. Si Juan tiene la edad que tendrá Pedro cuando Juan tenga el doble de la edad que tiene Pedro. ¿Cuántos años tiene cada uno?

22. En granja hay gallinas, patos y conejos. El número de conejos aumentado en diez es equivalente al número de patos. El número de gallinas disminuido en el número de conejos es igual al mitad del número de patos. Si el número total de animales es 22, ¿Cuántos conejos hay?